УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ЛИПЕЦКОЙ ОБЛАСТИ

ГОАПОУ «Липецкий металлургический колледж»

Методические указания по проведению практических работ

по учебной дисциплине

ЕН 01 Элементы высшей математики

Тема 4.3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Практические работы

№15. Интегрирование рациональных и иррациональных дробей

№16. Приложения определенного интеграла

№17. Нахождение несобственных интегралов

для специальности (группы специальностей):

09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Л и п е ц к - 2 0 1 5

Методические указания по проведению практических работ по учебной дисциплине ЕН 01 «Элементы высшей математики»

Составитель: *Мягкова М.В.*, преподаватель общеобразовательных дисциплин

ОДОБРЕНО цикловой комиссией математических и общих естественнонаучных дисциплин	УТВЕРЖДАЮ Заместитель директора по учебной работе:
Председатель: ____________ */Красникова Л.Н./*	_________________*/Перкова Н.И./*

Методические указания по проведению практических работ предназначены для студентов ГОАПОУ «Липецкий металлургический колледж» специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы для подготовки к практическим работам с целью освоения практических умений и навыков и профессиональных компетенций.

Методические указания по проведению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» (дисциплина входит в математический и общий естественнонаучный учебный цикл учебного плана специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы по программе базовой подготовки).

Введение

Методические указания по проведению практических работ составлены в соответствии с содержанием рабочей программы учебной дисциплины «Элементы высшей математики» (дисциплина входит в математический и общий естественнонаучный учебный цикл учебного плана специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы по программе базовой подготовки).

Практические работы направлены на освоение следующих практических умений и знаний согласно требованиям ФГОС СПО специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, рабочей программы дисциплины «Элементы высшей математики».

уметь:
применять методы интегрального исчисления;

знать:
основы математического анализа.

Методические указания по проведению практических работ содержат теоретическую часть, который кратко представляет основной материал, необходимый для освоения коммуникативных умений и знаний; практические задания; контрольные вопросы для самопроверки.

Методические указания по проведению практических работ могут быть использованы студентами для самостоятельной работы, преподавателями на учебных занятиях по математике.

Практические работы следует проводить по мере прохождения студентами теоретического материала.

Методические указания к выполнению практической работы для студентов

1. К выполнению практической работы необходимо подготовиться до начала учебного занятия.
2. При подготовке к практической работе используйте рекомендованную литературу, предложенную в данных методических указаниях, конспекты лекций.
3. К выполнению работы допускаются студенты, освоившие необходимый теоретический материал.
4. Студенты обязаны иметь при себе линейку, карандаш, калькулятор, тетрадь.
5. По окончании выполнения практической работы проверьте себя, ответив на контрольные вопросы для самопроверки.
6. Если практическая работа не сдана в указанные сроки (до выполнения следующей практической работы) по неуважительной причине, оценка снижается.

Практическая работа №15

Тема: «Интегрирование рациональных и иррациональных дробей»

Цель практического занятия:
Отработать навыки нахождения неопределенных интегралов от простейших рациональных и иррациональных дробей; применения универсальной подстановки

Порядок выполнения работы:
1. Усвоить теоретический материал по теме «Интегрирование рациональных и иррациональных дробей»
2. Ответить на контрольные вопросы для самопроверки.
3. Выполнить и записать задания практической работы в тетрадь по математике.
4. Сдать выполненную практическую работу на проверку преподавателю.

Теоретическая часть.

Интегрирование рациональных функций

Определение 1. Функция вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степеней n и m называется рациональной. Целая рациональная функция, т.е. многочлен, интегрируется непосредственно. Интеграл от дробно-рациональной функции можно найти путем разложения на слагаемые, которые стандартным образом преобразуются к основным табличным интегралам.

Определение 2. Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется правильной, если степень числителя n меньше степени знаменателя m. Дробь, у которой степень числителя больше или равна степени знаменателя, называется неправильной.

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Это делается посредством деления многочлена на многочлен «столбиком», подобно делению чисел.

Пример.

Представим дробь $\dfrac{2x^4-5x^3+2x+4}{x-1}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^4-5x^3+2x+4 & \;x-1 \\
\underline{2x^4-2x^3\qquad\qquad} & \overline{\;2x^3-3x^2-3x-1} \\
-\;-3x^3\qquad\qquad & \\
\underline{-3x^3+3x^2\qquad} & \\
-\;-3x^2+2x\quad & \\
\underline{-3x^2+3x\quad} & \\
-\;-x+4 & \\
\underline{-x+1} & \\
3 &
\end{array}
$$

Первое слагаемое $2x^3$ в частном получается как результат деления старшего члена $2x^4$, делимого на старший член x делителя. Затем умножаем $2x^3$ на делитель $x-1$ и полученный результат вычитаем из делимого; аналогично находятся остальные слагаемые неполного частного.

Выполнив деление многочленов, получим:

$$\frac{2x^4-5x^3+2x+4}{x-1}=2x^3-3x^2-3x-1+\frac{3}{x-1}.$$

Это действие называется выделением целой части.

Определение 3. Простейшими дробями называются правильные рациональные дроби следующих типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$.

II. $\dfrac{A}{(x-a)^K}$, (K=2, 3, …).

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^K}$, где K=2, 3, …; квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Рекомендация. Для разложения правильной рациональной дроби на простейшие нужно выполнить следующие операции:

а) разложить знаменатель $Q_m(x)$ на простейшие действительные множители (согласно основной теореме алгебры это разложение может содержать линейные двучлены вида $x-a$ и квадратные трехчлены x^2+px+q, не имеющие корней);

б) написать схему разложения данной дроби на сумму простейших дробей. При этом каждому сомножителю вида $(x-a)^k$ соответствует k слагаемых видов I и II:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k};$$

каждому сомножителю вида (x^2+px+q) соответствует е слагаемых видов III и IV:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_nx+N_e}{(x^2+px+q)^e}.$$

Пример.

Записать схему разложения дроби $\dfrac{5x+1}{(x+1)^3(x^2+4)^2x}$ в сумму простейших.

$$\frac{5x+1}{(x+10^3(x^2+4)^2x}=\frac{A}{x}+\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+4}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+4)^2};$$

в) выполнить сложение полученных простейших дробей. Записать равенство числителей полученной и исходной дробей;

г) найти коэффициенты соответствующего разложения: A_k, M_n, N_e (методы решения будут рассмотрены ниже);

д) найденные значения коэффициентов подставить в схему разложения.

Интегрирование всякой правильной рациональной дроби после разложения на простейшие слагаемые сводится к нахождению интегралов одного из типов:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x-a}, \quad J_2 = \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad J_3 = \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}, \quad J_4 = \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^e}.$$

(k и e =2, 3, …).

Вычисление интеграла J_1 сводится к формуле III:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C;$$

интеграла J_2 — к формуле II:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C;$$

интеграл J_3 можно найти по правилу, указанному в теории интегрирования функций, содержащих квадратный трехчлен; J_4 — путем преобразований, показанных ниже.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{3x+5}{x^2+3x-10} dx$.

Решение.

Здесь подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель имеет два корня $x=-5, x=2$.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{3x+5}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

и найдем коэффициенты A и B. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{3x+5}{x^2+3x-10} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{x^2+3x-10}.$$

Из этого равенства следует тождество

$$3x+5 = A(x+5) + B(x-2).$$

Полагая в полученном тождестве $x=2$, находим

$$7A = 11, \ A = \frac{11}{7}.$$

При $x=-5$, получаем $-7B=-10$, $B=\dfrac{10}{7}$. Следовательно, подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{3x+5}{x^2+3x-10}=\frac{\frac{11}{7}}{x-2}+\frac{\frac{10}{7}}{x+5}.$$

Поэтому

$$\int\frac{3x+5}{x^2+3x-10}dx=\frac{11}{7}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{10}{7}\int\frac{dx}{x+5}=\frac{11\ln|x-2|+10\ln|x+5|}{7}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{7x-1}{x^2+2x+1}dx$.

Решение.

В этом случае знаменатель рациональной дроби имеет кратный корень $x=-1$. Представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{7x-1}{x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$

и найдем коэффициенты *A* и *B*. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{7x-1}{x^2+2x+1}=\frac{A(x+1)+B}{x^2+2x+1}.$$

Из полученного равенства следует тождество

$7x-1=A(x+1)+B$.

Полагая в нем $x=-1$, находим $B=-8$; полагая $x=0$, получаем $A+B=-1$, т.е. $A=7$.

Следовательно, $\displaystyle\frac{7x-1}{x^2+2x+1}=\frac{7}{x+1}-\frac{8}{(x+1)^2}$.

Поэтому

$$\int\frac{7x-1}{x^2+2x+1}dx=7\int\frac{dx}{x+1}-8\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=7\ln|x+1|+\frac{8}{x+1}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$.

Решение.

Знаменатель рациональной дроби не имеет корней. Представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{3x-2}{x^2-4x+5}=A\frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}+B\frac{1}{x^2-4x+5}.$$

Для определения коэффициентов A и B получаем тождество $3x-2=A(2x-4)+B$.

Полагая здесь, например, $x=2$, а затем $x=0$, получим $B=4$ и $-4A+B=-2$, т.е. $A=\frac{3}{2}$.

Следовательно,

$$\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}+4\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4arctg(x-2)+C$$

Пример 4. $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx.$

Решение.

а) разложим знаменатель на множители:

$x^3+4x^2+4x=x(x^2+4x+4)=x(x+2)^{2;};$

б) напишем схему разложения подынтегральной функции на слагаемые:

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2};$$

в) выполним сложение простейших дробей:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx}{x(x+2)^2}.$$

Запишем равенство числителей дробей:

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A;$$

г) для нахождения неизвестных коэффициентов A, B, C существуют два метода.

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x, поэтому можно составить соответствующую систему уравнений. В этом заключается один из методов решения.

Коэффициенты при

$x^2: A+B=3,$

$x: 4A+2B+C=0,$

свободные члены (коэффициенты при x^0): $4A=8$.

Решив систему, получим $A=2$, $B=1$, $C=-10$.

Другой метод — частных значений будет рассмотрен в следующем примере;

д) подставим найденные значения в схему разложения:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}.$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму, и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем:

$$\int\frac{(3x^2+8)dx}{x(x+2)^2}=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(x+2)dx}{x+2}-10\int(x+2)^{-2}d(x+2)=$$

$$=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C$$

Пример 5. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)x}$.

Решение.

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x}=\frac{Ax(x+2)+Bx(x-1)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)x},$$

тогда $1=Ax(x+2)+Bx(x-1)+C(x-1)(x+2)$.

Тождество есть равенство, справедливое при любых значениях входящих в него неизвестных. На этом основан *метод частных значений.* Можно придавать x любые значения. Удобнее для вычислений брать те значения, которые обращают в нуль какие-либо слагаемые в правой части равенства.

Пусть $x=0$. Тогда $1=A\cdot 0(0+2)+B\cdot 0\,(0-1)+C\cdot(0-1)(0+2)$.

Аналогично при $x=-2$ имеем $1=-2B*(-3)$, при $x=1$ имеем $1=3A$.

Следовательно, $A=\frac{1}{3}, B=\frac{1}{6}, C=-\frac{1}{2}$.

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)x}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

Пример 6. $\int \frac{(x^3+4x^2-2x+1)dx}{x^4+x}$.

Решение.

а) $x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1)$;

б)

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x)}{x^4+x};$$

в) $x^3+4x^2-2x+1=A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x)$;

г) сначала воспользуемся методом частных значений.

Пусть $x = 0$, тогда $1 = A \cdot 1$, $A = 1$.

При $x = -1$ имеем $-1+4+2+1 = -B(1+1+1)$ или $6 = -3B$, $B = -2$.

Для нахождения коэффициентов C и D нужно составить еще два уравнения. Для этого можно взять любые другие значения x, например $x = 1$ и $x = 2$. Можно воспользоваться первым методом, т.е. приравнять коэффициенты при каких-либо одинаковых степенях x, например при x^3 и x^2. Получим

$1 = A+B+C$ *и* $4 = C + D - B$.

Зная $A = 1$, $B = -2$, найдем $C = 2$, $D = 0$.

Таким образом, при вычислении коэффициентов можно сочетать оба метода.

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1},$$

поэтому

$$J=\frac{(x^3+4x^2-2x+1)dx}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{xdx}{x^2-x+1}.$$

Последний интеграл J_3 находим отдельно по правилу, указанному в методе веления новой переменной. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4};$$

положим, $x-\dfrac{1}{2}=t$, тогда $dx=dt$. Получим:

$$J_3=\int\frac{(t+1/2)dt}{t^2+3/4}=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+3/4}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+3/4}=\frac{1}{2}\ln(t^2+\frac{3}{4})+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Подставляя в предыдущее равенство, найдем

$$J=\ln\frac{|x|(x^2-x+1)}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 7. Найти $\displaystyle\int\frac{(x^3-3)dx}{x^4+10x^2+25}$.

Решение.

а) $x^4+10x^2+25=(x^2+5)^2$;

б) $\dfrac{x^3-3}{(x^2+5)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+5}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+5)^2}$;

в)

$$x^3-3=(Ax+B)(x^2+5)+Cx+D=Ax^3+Bx^2+(5A+C)x+(5B+D);$$

г) $A=1; B=0; 5A+C=0; 5B+D=-3$ или

$A=1; B=0; C=-5; D=-3$;

д) $\dfrac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\dfrac{x}{x^2+5}-\dfrac{5x+3}{(x^2+5)^2}$.

Интегрируя, имеем:

$$J=\int\frac{(x^3-3)dx}{(x^2+5)^2}=\int\frac{xdx}{x^2+5}-5\int\frac{xdx}{(x^2+5)^2}.$$

Первый интеграл преобразуем к формуле III:

$$\int\frac{xdx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+C.$$

Второй интеграл преобразуем к формуле II:

$$\int\frac{xdx}{(x^2+5)^2}=\frac{1}{2}\int(x^2+5)^{-2}d(x^2+5)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{2(x^2+5)}+C.$$

В третьем интеграле заменим переменную: $x = \sqrt{5}tgz$,

$$dx = \frac{\sqrt{5}dz}{\cos^2 z}.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+5)^2} = \int \frac{\sqrt{5}\cos^4 zdz}{25\cos^2 z} = \frac{1}{5\sqrt{5}}\int \cos^2 zdz = \frac{1}{10\sqrt{5}}\int (1+\cos 2z)dz =$$

$$= \frac{1}{10\sqrt{5}}(z + \frac{1}{2}\sin 2z) + C = \frac{1}{10\sqrt{5}}(arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}) + C.$$

(При выполнении преобразований воспользовались формулой тригонометрии $\sin 2z = \frac{2tgz}{1+tg^2 z}$).

Интегрирование иррациональных функций

Интегрирование алгебраических и трансцендентных иррациональных функций в некоторых известных случаях сводится к интегрированию рациональных дробей.

I. Интеграл вида $\int R\left(x, x^{\alpha 1}, x^{\alpha 2}, ...\right)\mathrm{dx}$, где R – рациональная функция, $\alpha_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $\alpha_2 = \frac{m_2}{n_2}, \ldots$ — рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^k$, где *k*-общий знаменатель дробей $a_1, a_2, ...$

Пример 8.

Решение.

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^4, t \geq 0 \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{t^2+t^4}4t^3 dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int (1 + \frac{t-1}{t^2+1})dt =$$

$$= \int (dt + \frac{tdt}{t^2+1} - \frac{dt}{1+t^2}) = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4arctgt + C =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

К интегралам от функций, рационально зависящим от тригонометрических функций, сводятся интегралы:

III. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ — подстановкой $x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

IV*. $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ — подстановкой $x=arctgt, -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$.

V*. $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ — подстановкой

$x=\dfrac{a}{\cos t}, 0\le t\le \pi, t\ne \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 9.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}dx}{x^6}=\left|\begin{matrix} x=2\sin t, -\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2} \\ dx=2\cos tdt \end{matrix}\right|=\int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\cos^4 tdt}{\sin^6 t}=\frac{1}{4}\frac{ctg^4 tdt}{\sin^2 t}=\left|\begin{matrix} ctgt=z \\ dt/\sin^2 t=dz \end{matrix}\right|=\frac{1}{4}z^4dz=\frac{1}{4}\frac{z^5}{5}+C=$$

$$=\frac{1}{20}ctg^5 t+C=-\frac{1}{20}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)^5+C.$$

При решении выполнили преобразования: при

$-\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2}, \cos t\ge 0,$

$$ctgt=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-x^2/4}}{x/2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

Пример 10.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}=\left|\begin{matrix} x=tgx, -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2} \\ dx=dt/\cos^2 t \end{matrix}\right|=\int \frac{1}{\cos t\cdot tg^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int \frac{\cos^2 tdt}{\cos t\sin^2 t\cos^2 t}=$$

$$=\int \frac{\cos tdt}{\cos^2 t\sin^2 t}=\int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)\sin^2 t}=\left|\begin{matrix} \sin t=u \\ \cos tdt=du \end{matrix}\right|=\int \frac{du}{(1-u^2)u^2}.$$

В решении использовано: $\sqrt{1+tg^2 t}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\dfrac{1}{|\cos t|}=\dfrac{1}{\cos t}$

при $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2}$.

$$\frac{1}{(1-u^2)u^2}=\frac{-1}{(u-1)(1+u)u^2}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u+1}+\frac{D}{u-1};$$

-1= $Au(u^2-1)+B(u^2-1)+Cu^2(u-1)+Du^2(u+1).$

Пусть *u = 0*; тогда *-1 = - B, B = 1*.

u = -1; тогда *- 1 = 2D, D = -1/2*.

u = -1; тогда *-1 = -2C, C = 1/2*.

Приравняем коэффициенты при $u^3: 0=A+C+D,$ отсюда *A = 0*.

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}=\int\frac{du}{(1-u^2)u^2}=\int\frac{du}{u^2}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u+1}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u-1}=$$

$$-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\ln|u+1|-\frac{1}{2}\ln|u-1|+C=\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C=$$

$$=(\sin t=tgt\cos t=tgt\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}-x}\right|+C.$$

VI. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$ можно вычислить подстановкой $e^x=z.$ При этом $x=\ln z, dx=dz/z.$

Пример 11.

Решение.

$$\int\frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1}=\left|\begin{array}{l}z=e\\x=\ln z\\dx=dz/z\end{array}\right|=\int\frac{z^3dx}{\left(z^2+1\right)z}=\int\frac{z^2dz}{z^2+1}=\int\left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz=$$

$$=z-arctgz+C=e^x-arctg^x+C.$$

Замечание. Не всякая элементарная функция имеет интеграл, выраженный через элементарные функции.

Примеры

$$\int\frac{\sin xdx}{x},\quad\int\frac{\cos xdx}{x},\quad\int\frac{dx}{\ln x},\quad\int\frac{e^xdx}{x},\quad\int e^{-x^2}dx,\quad\int\sin^2dx,$$

$$\int\cos x^2dx,\quad\int\sqrt{\sin x}dx,\quad\int\frac{dx}{\sqrt{2-\sin^2x}},\quad\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}.$$

Вышеприведенные интегралы не выражаются суммой конечного числа элементарных функций и называются «не берущимися» интегралами.

Задания для выполнения практической работы.

Вариант 1.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx$; 2) $\int \frac{x+3}{x^2-4x+4}dx$;

3) $\int \frac{x-6}{x^2-5x+7}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$;

Вариант 2.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-2}{x^2-3x-4}dx$; 2) $\int \frac{3x+2}{x^2+6x+9}dx$;

3) $\int \frac{x-5}{x^2+6x+10}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx$;

Вариант 3.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{2x-3}{x^2-7x+12}dx$; 2) $\int \frac{2x-5}{x^2+12x+36}dx$;

3) $\int \frac{2x+6}{x^2-2x+6}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$;

Вариант 4.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x+6}{x^2+8x+15}dx$; 2) $\int \frac{x-4}{x^2-10x+25}dx$;

3) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+5}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$;

Вариант 5.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{4x-1}{x^2+5x-6}dx$; 2) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+4}dx$;

3) $\int \frac{2x-6}{x^2-5x+8}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$;

Вариант 6.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-2}{x^2-5x+4}dx$; 2) $\int \frac{2x+3}{x^2-6x+9}dx$;

3) $\int \frac{5x+2}{x^2+6x+11}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx$;

Вариант 7.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{3x}{x^2-8x+12}dx$; 2) $\int \frac{5x-1}{x^2-12x+36}dx$;

3) $\int \frac{6x+1}{x^2-3x+6}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx$;

Вариант 8.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x+6}{x^2+2x-15}dx$; 2) $\int \frac{4x+3}{x^2+10x+25}dx$;

3) $\int \frac{2x-7}{x^2+3x+5}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}\ dx$

Вариант 9.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-3}{x^2-2x-8}dx$; 2) $\int \frac{2x}{x^2-14x+49}dx$;

3) $\int \frac{6x}{x^2-4x+7}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-x}\ dx$

Вариант 10.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{4x-5}{x^2-3x-40}dx$; 2) $\int \frac{2x+1}{x^2+16x+64}dx$;

3) $\int \frac{4x}{x^2-6x+10}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-6\sqrt{x}}\,dx$

Вариант 11.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx$; 2) $\int \frac{x+3}{x^2-4x+4}dx$;

3) $\int \frac{x-6}{x^2-5x+7}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$;

Вариант 12.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-2}{x^2-3x-4}dx$; 2) $\int \frac{3x+2}{x^2+6x+9}dx$;

3) $\int \frac{x-5}{x^2+6x+10}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx$;

Вариант 13.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{2x-3}{x^2-7x+12}dx$; 2) $\int \frac{2x-5}{x^2+12x+36}dx$;

3) $\int \frac{2x+6}{x^2-2x+6}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$;

Вариант 14.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x+6}{x^2+8x+15}dx$; 2) $\int \frac{x-4}{x^2-10x+25}dx$;

3) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+5}dx;$ 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx;$

Вариант 15.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{4x-1}{x^2+5x-6}dx;$ 2) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+4}dx;$

3) $\int \frac{2x-6}{x^2-5x+8}dx;$ 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}}dx;$

Вариант 16.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-2}{x^2-5x+4}dx;$ 2) $\int \frac{2x+3}{x^2-6x+9}dx;$

3) $\int \frac{5x+2}{x^2+6x+11}dx;$ 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx;$

Вариант 17.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{3x}{x^2-8x+12}dx;$ 2) $\int \frac{5x-1}{x^2-12x+36}dx;$

3) $\int \frac{6x+1}{x^2-3x+6}dx;$ 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx;$

Вариант 18.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x+6}{x^2+2x-15}dx;$ 2) $\int \frac{4x+3}{x^2+10x+25}dx;$

3) $\int \frac{2x-7}{x^2+3x+5}dx;$ 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}\,dx$

Вариант 19.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-3}{x^2-2x-8}dx$; 2) $\int \frac{2x}{x^2-14x+49}dx$;

3) $\int \frac{6x}{x^2-4x+7}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-x}\,dx$

Вариант 20.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{4x-5}{x^2-3x-40}dx$; 2) $\int \frac{2x+1}{x^2+16x+64}dx$;

3) $\int \frac{4x}{x^2-6x+10}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-6\sqrt{x}}\,dx$

Вариант 21.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx$; 2) $\int \frac{x+3}{x^2-4x+4}dx$;

3) $\int \frac{x-6}{x^2-5x+7}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$;

Вариант 22.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-2}{x^2-3x-4}dx$; 2) $\int \frac{3x+2}{x^2+6x+9}dx$;

3) $\int \frac{x-5}{x^2+6x+10}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx$;

Вариант 23.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{2x-3}{x^2-7x+12}dx$; 2) $\int \frac{2x-5}{x^2+12x+36}dx$;

3) $\int \frac{2x+6}{x^2-2x+6}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$;

Вариант 24.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x+6}{x^2+8x+15}dx$; 2) $\int \frac{x-4}{x^2-10x+25}dx$;

3) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+5}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$;

Вариант 25.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{4x-1}{x^2+5x-6}dx$; 2) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+4}dx$;

3) $\int \frac{2x-6}{x^2-5x+8}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$;

Вариант 26.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-2}{x^2-5x+4}dx$; 2) $\int \frac{2x+3}{x^2-6x+9}dx$;

3) $\int \frac{5x+2}{x^2+6x+11}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx$;

Вариант 27.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{3x}{x^2-8x+12}dx$; 2) $\int \frac{5x-1}{x^2-12x+36}dx$;

3) $\int \frac{6x+1}{x^2-3x+6}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx$;

Вариант 28.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x+6}{x^2+2x-15}dx$; 2) $\int \frac{4x+3}{x^2+10x+25}dx$;

3) $\int \frac{2x-7}{x^2+3x+5}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}\,dx$

Вариант 29.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-3}{x^2-2x-8}dx$; 2) $\int \frac{2x}{x^2-14x+49}dx$;

3) $\int \frac{6x}{x^2-4x+7}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-x}\,dx$

Вариант 30.

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{4x-5}{x^2-3x-40}dx$; 2) $\int \frac{2x+1}{x^2+16x+64}dx$;

3) $\int \frac{4x}{x^2-6x+10}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-6\sqrt{x}}\,dx$

Контрольные вопросы для самопроверки.

1. Преобразование неправильной рациональной дроби.

2. Разложение знаменателя на простейшие дроби.

3. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей.

4. Метод неопределенных коэффициентов.

5. Интегрирование рациональных дробей.

6. Универсальная подстановка.

7. Интегрирование иррациональных дробей.

Практическая работа №15

Тема: «Приложения определенного интеграла»

Цель практического занятия:
Отработать навыки нахождения площадей и объемов с помощью определенного интеграла.

Порядок выполнения работы:
1. Усвоить теоретический материал по теме «Приложения определенного интеграла».
2. Ответить на контрольные вопросы для самопроверки.
3. Выполнить и записать задания практической работы в тетрадь по математике.
4. Сдать выполненную практическую работу на проверку преподавателю.

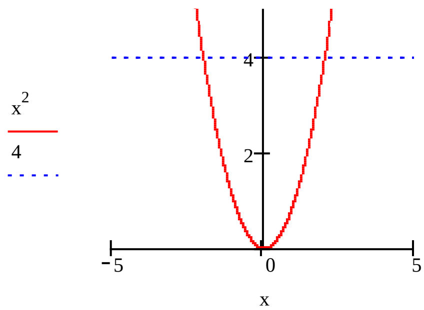
Теоретическая часть.

Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ численно равна определенному интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}, x = 0, y = 4$.



Решение.

$$S=\int_0^4\sqrt{y}dy=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{16}{3}\text{ (кв. ед.)}$$

Ответ. $\frac{16}{3}$ кв. ед.

Пусть функция $y=f(x)$ неположительна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Площадь S над кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ отличается знаком от определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

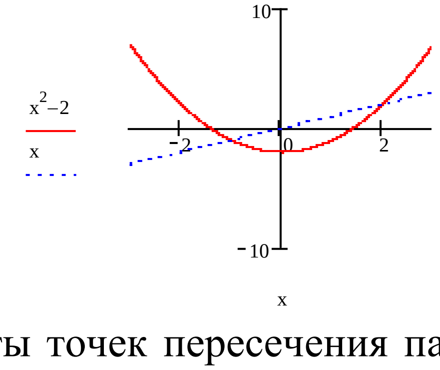
Приведем формулу, применение которой упрощает решение задач на вычисление площадей плоских фигур.

Теорема. Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ такие, что $f_2(x)\geq f_1(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и на отрезке $[a;b]$ вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b(f_2(x)-f_1(x))dx. \qquad (2)$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2, y=x$

Решение.



Найдем координаты точек пересечения параболы $y=x^2-2$ и прямой $y=x$, решив систему этих уравнений: $(-1;-1)$ и $(2;2)$. На отрезке $[-1;2]$ $x\geq x^2-2$. Воспользуемся формулой (2), полагая

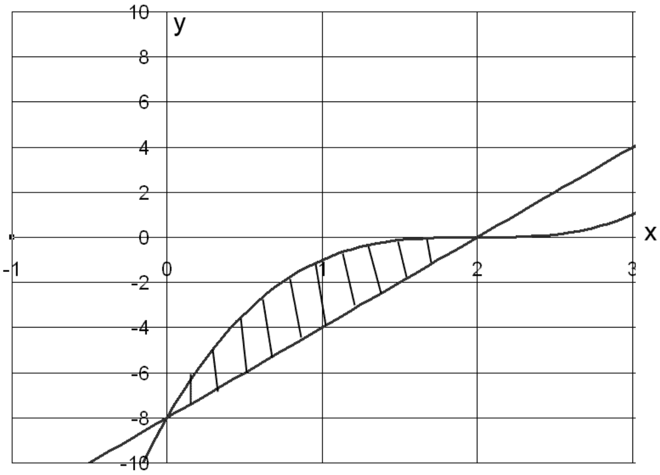
$f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - 2$. Абсциссы точек пересечения линий зададут пределы интегрирования:

$$S = \int_{-1}^{2} (x - (x^2 - 2))dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(4 - (-1)^2) - \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) + 2(2 - (-1)) = 4,5(ед.^2)$$

Ответ. 4,5 кв. ед.

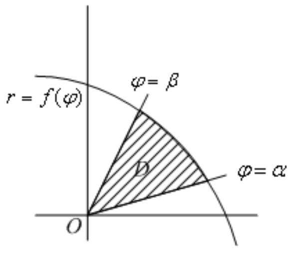
Пример 3. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций $y = (x-2)^3, y = 4x - 8.$



$$S = 2\int_{0}^{2} (4x - 8 - (x-2)^3)dx = 2\int_{0}^{2} (4x - 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8)dx =$$

$$= 2\int_{0}^{2} (6x^2 - x^3 - 8x)dx = 2(2x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 4x^2)\Big|_{0}^{2} = 4\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^4 - 8\cdot 2^2 = 8.$$

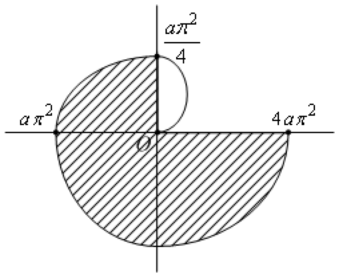
Ответ. 8 кв. ед.



Площадь *криволинейного сектора*, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = f\ (\phi)$ и двумя лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$ вычисляется по формуле:

$$S_D = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi. \qquad (3)$$

Пример 4. Найти площадь S области, ограниченной частью спирали $r = a\phi^2$ $(a > 0)$ при $\phi \in [0; 2\pi]$ и отрезком $[0; 4\pi^2 a]$ оси Ox (см. рис.).

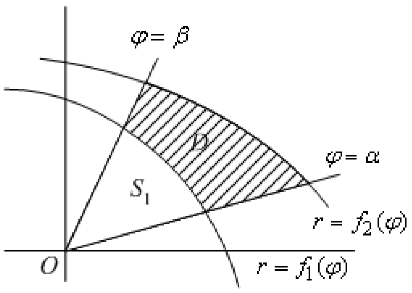


Решение. Применяя формулу, получаем:

$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(a\phi^2\right)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^5}{5}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{10}\left(2\pi\right)^5 = \frac{16a^2\pi^5}{5}$$

Ответ. $\frac{16a^2\pi^5}{5}$ кв. ед.

Если область D имеет границу, состоящую из двух отрезков лучей $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$ (эти отрезки могут вырождаться в одну точку) и двумя линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = f_1(\phi)$ и $r = f_2(\phi)$, причём $f_1(\phi) \le f_2(\phi)$ при всех $\phi \in [\alpha; \beta]$ (см. рис.)



то площадь S области D можно представить как разность двух площадей: S_2 — площади области, лежащей между лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$, и линией $r = f_2(\phi)$, и S_1 — площади области, лежащей между лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$, линией $r = f_1(\phi)$.

Каждую из площадей S_1 и S_2 можно подсчитать по формуле, так что получаем в итоге

$$S_D = \frac{1}{2}\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_2(\varphi)\right)^2 d\varphi - \int_{\alpha}^{\beta}\left(f_1(\varphi)\right)^2 d\varphi\right) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\left(f_2(\varphi)\right)^2 d\varphi - \left(f_1(\varphi)\right)^2 d\varphi\right)$$

Если кривая задана *параметрическими уравнениями* $x=x=(t)$ и $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,. \tag{4}$$

Вычисление объемов тел вращения

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $y = f(x)$. Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx, \tag{5}$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b xydx,\ \ a \geq 0 \tag{6}$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \geq 0)$ и прямыми $x=0$, $y=c$, $y=d$, то объем тела вращения равен

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy. \tag{7}$$

Пример 5.

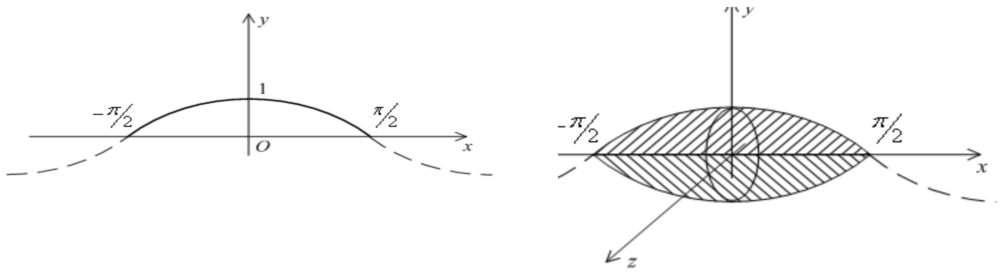
Решение. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1$ вокруг оси Ox.

По формуле (7) искомый объем

$$V_x = \pi \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi(-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e^2}) \approx 1{,}36 \text{ (ед.}^2\text{)}$$

Ответ. $\approx 1{,}36$ куб. ед.

Пример 6. Пусть в плоскости xOy рассматривается линия y=cosx на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



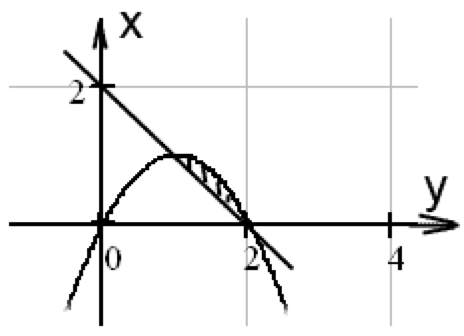
Эта линия вращается в пространстве вокруг оси Ox, и полученная поверхность вращения ограничивает некоторое тело вращения (см. рис.). Найдём объём V этого тела вращения.

Решение. Согласно формуле, получаем:

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2x\right) dx = \frac{\pi}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$$

Ответ. $\frac{\pi^2}{2}$ куб. ед.

Пример 7. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = 2x - x^2, y = -x + 2$, относительно оси вращения Ox.



Решение.

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

$$V = \pi\int_1^2 (2x - x^2 + x - 2)^2 dx = \pi\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)^2 dx =$$

$$= \pi\int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4)dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{32}{5} - 24 + \frac{104}{3} - 24 + 8 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 6 - 4\right) = \frac{\pi}{30}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{30}$ куб. ед.

Задания для выполнения практической работы.

Вариант 1.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 3x + 2;\ y = x - 1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиком функции $x^2 + y = 0$ и прямыми $y = -1,\ x = 0$.

Вариант 2.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 2x + 3;\ y = 3 - x.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

Вариант 3.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 2x - 3;\ y = -x - 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y + x^2 = 0,\ y = 0,\ x = 1.$

Вариант 4.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 2x + 5;\ y = x + 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox.

Вариант 5.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x + 3;\ y = -x + 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Вариант 6.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 6x - 5;\ y = x - 1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3,\ y = 1,\ x = 0$.

Вариант 7.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 6x + 5;\ y = x - 5.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$.

Вариант 8.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+x+6;\ y=6-2x.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций: $y=-x^2+1,\quad y=0$.

Вариант 9.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2-2x+3;\ y=1-x.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций: $y=x^2,\quad y=2x$.

Вариант 10.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-4x+5;\ y=x+1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y=x^2+2$ и прямыми $y=0,\ x=1.$

Вариант 11.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-3x+2;\ y=x-1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиком функции $x^2+y=0$ и прямыми $y=-1,\ x=0$.

Вариант 12.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+2x+3;\ y=3-x.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

Вариант 13.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 2x - 3;\ \ y = -x - 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y + x^2 = 0,\ y = 0,\ x = 1.$

Вариант 14.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 2x + 5;\ \ y = x + 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox.

Вариант 15.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x + 3;\ \ y = -x + 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Вариант 16.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 6x - 5;\ \ y = x - 1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3,\ \mathrm{y} = 1,\ x = 0$.

Вариант 17.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 6x + 5;\ \ y = x - 5.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$.

Вариант 18.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+x+6;\ \ y=6-2x.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y=-x^2+1, \quad y=0$.

Вариант 19.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2-2x+3;\ \ y=1-x.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y=x^2, \quad y=2x$.

Вариант 20.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-4x+5;\ \ y=x+1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y=x^2+2$ и прямыми $y=0,\ x=1$.

Вариант 21.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-3x+2;\ \ y=x-1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиком функции $x^2+y=0$ и прямыми $y=-1,\ x=0$.

Вариант 22.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+2x+3;\ \ y=3-x.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

Вариант 23.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 2x - 3;\ y = -x - 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y + x^2 = 0,\ y = 0,\ x = 1.$

Вариант 24.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 2x + 5;\ y = x + 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox.

Вариант 25.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x + 3;\ y = -x + 3.$

Задание 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Вариант 26.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 6x - 5;\ y = x - 1.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3,\ \text{y} = 1,\ x = 0$.

Вариант 27.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 6x + 5;\ y = x - 5.$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$.

Вариант 28.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+x+6$; $y=6-2x$.

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций: $y=-x^2+1$, $y=0$.

Вариант 29.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2-2x+3$; $y=1-x$.

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций: $y=x^2$, $y=2x$.

Вариант 30.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-4x+5$; $y=x+1$.

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y=x^2+2$ и прямыми $y=0$, $x=1$.

Контрольные вопросы

1. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Площадь криволинейной трапеции.
3. Площади плоских фигур.
4. Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси Ox.

Практическая работа №17

Тема: «Нахождение несобственных интегралов»

Цель практического занятия:
Отработать навыки нахождения несобственных интегралов; определять сходимость (расходимость) несобственных интегралов.

Порядок выполнения работы:
1. Усвоить теоретический материал по теме «Несобственные интегралы».
2. Ответить на контрольные вопросы для самопроверки.
3. Выполнить и записать задания практической работы в тетрадь по математике.
4. Сдать выполненную практическую работу на проверку преподавателю.

Теоретическая часть.

Определенный интеграл $S = \int_a^b f(x)dx$ называется **несобственным интегралом**, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:
1) Предел a или b (или оба предела) являются бесконечными;
2) Функция $y = f(x)$ имеет одну или несколько точек разрыва внутри интервала $[a;b]$.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на произвольном отрезке $[a;\ t]$, т.е. функция $\Phi(t) = \int_a^b f(x)dx$ определена для произвольного $t \geq a$.

Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $y = f(x)$ на полуинтервале $[a;+\infty)$ называется предел функции $\Phi(t)$ при t, стремящемся к $+\infty$, т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (1), существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся*** (к данному пределу), в противном случае – ***расходящимся.***

Пример 1. Вычислить $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Решение.

По определению $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^2}$. Для нахождения интеграла, стоящего под знаком предела, воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \int_a^{+\infty}x^{-2}dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^t = 1-\frac{1}{t}.$$

Тогда

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1,$$

т.е. искомый несобственный интеграл сходится к 1.

Ответ. 1.

По аналогии с (13) определяется *несобственный интеграл на полуинтервале* $(-\infty;b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx \qquad (2)$$

Определение сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ аналогично приведенному выше.

Введем понятие несобственного интеграла на интервале $(-\infty;+\infty)$. Пусть для некоторого числа a несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходятся. Тогда положим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3)$$

при этом интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***. Если хотя бы один из интегралов, входящих в правую часть равенства (3), расходится, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется ***расходящимся***.

Пример 2. Вычислить несобственный интегралы или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Решение. Исследуем на сходимость интегралы $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ и $\int_{0}^{+\infty} e^x dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} (e^0 - e^t) = 1,$$

т.е. первый из интегралов сходится к 1. Но

$$\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} e^x dx = \lim_{t\to+\infty} (e^t - 1) = +\infty,$$

т.е. $\int_{0}^{+\infty} e^x dx$ расходится и, следовательно, расходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Ответ. Расходится.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, называемый ***интегралом Эйлера-Пуассона***.

Доказано, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, но не ограниченна на полуинтервале $[a;b)$.

Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от функции *y=f(x)* на полуинтервале $[a;b)$ называется предел $\lim\limits_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$, где $\delta > 0$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx. \qquad (4)$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (4), существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся,*** в противном случае — ***расходящимся***.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y = f(x)$ непрерывной, но неограниченной на $(a;b]$.

Если функция $y = f(x)$ не ограничена при *x=c,* где $c \in (a;b)$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ также называется несобственным. В этом случае интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

считается ***сходящимся***, если сходятся два несобственных интеграла в правой части равенства. В противном случае $\int_a^b f(x)dx$ называется ***расходящимся***. Например, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x}$ является расходящимся, так как расходятся оба несобственных интеграла в правой части равенства.

Задания для выполнения практической работы.

Вариант 1.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x};\qquad б)\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вариант 2.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}};\qquad б)\ \int_0^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4}.$$

Вариант 3.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^{\infty}e^{-x}dx;\qquad б)\ \int_0^1\ln xdx.$$

Вариант 4.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}};\qquad б)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}.$$

Вариант 5.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_2^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4};\qquad б)\ \int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вариант 6.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8};\qquad б)\ \int_1^e\frac{dx}{x\ln^3 x}.$$

Вариант 7.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}. \qquad б)\ \int_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$$

Вариант 8.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^\infty xe^{-x^2}dx; \qquad б)\ \int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}.$$

Вариант 9.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad б)\ \int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}.$$

Вариант 10.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx \qquad б)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Вариант 11.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}; \qquad б)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вариант 12.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}; \quad б)\ \int_0^\infty \frac{xdx}{x^2+4}.$$

Вариант 13.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} e^{-x}dx; \qquad \text{б) } \int_0^1 \ln x dx.$$

Вариант 14.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \qquad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$$

Вариант 15.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}; \qquad \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вариант 16.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}; \qquad \text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}.$$

Вариант 17.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}. \qquad \text{б) } \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$$

Вариант 18.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx; \qquad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}.$$

Вариант 19.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad б)\ \int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}.$$

Вариант 20.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx \qquad б)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Вариант 21.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}; \qquad б)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вариант 22.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}; \quad б)\ \int_0^\infty \frac{xdx}{x^2+4}.$$

Вариант 23.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^\infty e^{-x}dx; \qquad б)\ \int_0^1 \ln x dx.$$

Вариант 24.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \qquad б)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$$

Вариант 25.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}; \qquad \text{б) } \int_1^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вариант 26.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}; \qquad \text{б) } \int_1^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$$

Вариант 27.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_2^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}. \qquad \text{б) } \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$$

Вариант 28.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx; \qquad \text{б) } \int_0^{1} \frac{dx}{x+x^2}.$$

Вариант 29.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_0^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}; \qquad \text{б) } \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}.$$

Вариант 30.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx \qquad \text{б) } \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Контрольные вопросы.

1. Несобственный интеграл с бесконечным пределом (пределами) интегрирования.
2. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
3. Теоремы сравнения.
4. Интеграл от разрывной функции.
5. Сходимость (расходимость) несобственных интегралов.